Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 9

Abgabe: Montag, den 24. Juni 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 9.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $x_1, \dots, x_n \in K$. Bestimmen Sie die Determinante der Vandermonde-Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times m}(K)$, $B \in M_{m\times n}(K)$, $C \in M_{n\times n}(K)$ und $\mathcal{O}$ bezeichne Nullmatrizen der entsprechenden Größen. Beweisen Sie die folgenden Gleichheiten:

(a) $\det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A \end{pmatrix} = \det(A)$.

(b) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} = \det(C) \det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix}$.

(c) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix}$.

(d) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} = \det(C) \det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n\times n}(K)$ invertierbar. Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten:

(a) $adj(AB) = adj(B)adj(A)$

(b) $\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1}$

(c) $adj(adj(A)) = (\det(A))^{n-2}A$

Aufgabe 9.4 (*4 Punkte*)

Lösen Sie das nachfolgende LGS über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_7$ mit Hilfe von Cramer's Regel:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$